Boukhobza Omar

DEVELOPPEMENTS LIMITES

EXERCICE 1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin x \, ch(x-\pi)$. Soit F une primitive de f.

a. Calculer $f(2\pi - x) + f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b. On définit les fonctions h et g par $h(x) = F(x) - F(2\pi - x)$ et $g(x) = F(x+2\pi) - F(x)$. Montrer que h est constante et calculer $h(\pi)$. Montrer que $g(0) = 0$.

c. Calculer $g'(0)$, $g''(0)$ et $g'''(0)$. Donner la formule de Taylor-McLaurin de g d'ordre 3.

EXERCICE 2. Calculer le dl_5 de la fonction :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} x / \sqrt{1-x^2}$$

En déduire le dl_6 de la fonction $g(x) = (\operatorname{Arcsin} x)^2$.

EXERCICE 3. Calculer les dl_4 des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{Log} \cos x.$$

EXERCICE 4. En utilisant les dl, montrer les équivalences suivantes :

$$\sin x - \operatorname{tg} x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$$

$$\operatorname{Arctg} x \underset{0}{\sim} x$$

$$\operatorname{Log}(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

EXERCICE 5. Soit une fonction f définie au voisinage d'un point a. On suppose que f est deux fois dérivable en a, que $f'(a) = 0$ et que $f''(a) \neq 0$.

Démontrer que si $f''(a) > 0$, f a un minimum en a. De



même, si $f''(a) < 0$, montrer que f a un maximum en a.

On considère les rectangles ayant un périmètre $p = 42m$. Parmi ces rectangles, déterminer ceux dont la surface est maximale.

On considère les cylindres ayant un volume $V = 86,86\ m^3$. Parmi ces cylindres, déterminer ceux dont la surface est minimale.

EXERCICE 6. Déterminer la position relative de courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0 dans le cas des fonctions :

$$\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{Arccos} x, \quad \operatorname{Argsh} x$$

EXERCICE 7. On considère la fonction $f(x) = (5 + x^2 + 8x^3)^{1/3}$.

a. Déterminer l'asymptote de f en $+\infty$.

b. Déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote.

RAPPEL : Développements limités qu'on détermine à l'aide d'opérations

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x^{2k+2}\varepsilon$$

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x^{2k+2}\varepsilon$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x^{2k+2}\varepsilon$$

$$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x^{2k+2}\varepsilon$$

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x^{2k+2}\varepsilon$$




ETUSUP.com